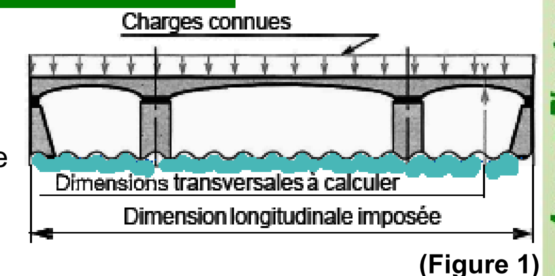
RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

I- BUT DE LA R.d.M :

La résistance des matériaux est l'étude de la résistance et de la déformation des solides d'une construction (arbres de transmission, axes, bâtiments, ponts,….) dans le but de déterminer ou vérifier leurs dimensions transversales afin qu'ils supportent les charges auxquelles ils sont soumis. **(Figure 1)**



(Figure 1)

II- HYPOTHÈSES DE LA R.d.M :

- Les matériaux sont supposés homogènes (formés par les mêmes atomes) et isotrope (même répartition des atomes).
- La géométrie des solides (poutre) présentant des sections droites, et des dimensions longitudinales importantes par rapport aux dimensions transversales **(Figure 2)**.
- Une poutre est engendrée par une section droite et plane (S) dont le barycentre G se déplace sur une ligne (ou courbe) AB appelée ligne moyenne qui est perpendiculaire à (S) **(Figure 2)**.
- Les forces appliquées en un point, sont des pointeurs, il n'est pas possible de remplacer par un système de forces équivalent, car les effets physiques sont différents.

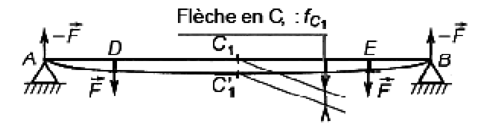
Plan de symétrie de la poutre
Ligne moyenne (Lm)
Section droite S_B et S_G
L > 4 ou 5D
Longueur de la poutre

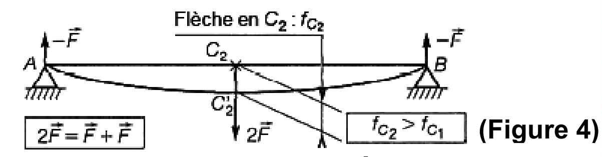
(Figure 2)

TRACTION ≠ COMPRESSION

(Figure 3)

(Dans la **Figure 3**, lorsque $\vec{A}$ et $\vec{B}$ glissent sur leur support, la traction devient de la compression).



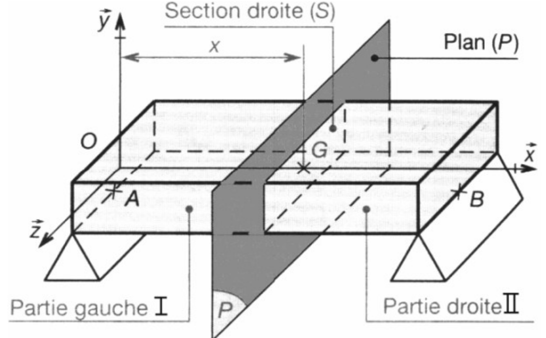


(Figure 4)

(Dans la **Figure 4**, la résultante $2\vec{F}$ provoque une flèche plus importante que les forces $\vec{F}$ en D et E).

III- COUPURE DANS UNE POUTRE : (Figure 5)

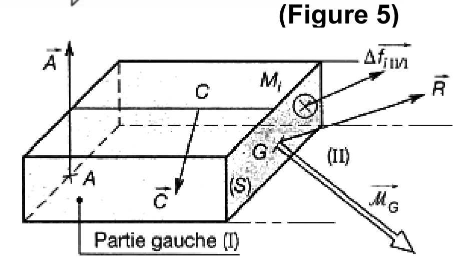
- Le plan (*P*) contenant la section droite (S) partage la poutre en deux parties (I) et (II) appelées Tronçons.
- On appelle (I) la partie gauche, ou amont de (*P*), et (II) partie droite, ou aval de (*P*).



(Figure 5)

3.1- Torseur de cohésion : (Figure 6)

Les actions mécaniques que la partie droite (II) exerce sur la section droite fictive (S) appartenant à (I) sont des actions extérieures à la partie (I). Leur répartition est inconnue mais nous pouvons les modéliser par un torseur de cohésion et calculer ses éléments de réduction en G, barycentre de la section (S).



(Figure 6)



$\vec{R} = \sum_{(S)} \vec{\Delta f_i}$: résultante des forces de cohésion ($\vec{\Delta f_i}$ de II / I)

$\vec{M_G} = \sum_{(S)} \left(\vec{GM_i} \wedge \vec{\Delta f_i} \right)$: moment résultante des $\vec{\Delta f_i}$ /à G

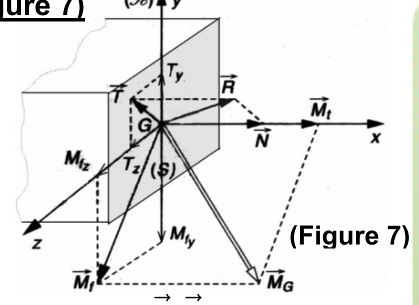
d'où : $\{Coh\, II/I\}_G = \left\{ \vec{R} \middle| \vec{M_G} \right\}_G$

Remarque : d'après le théorème des actions mutuelles on a : $\{Coh\, II/I\}_G = -\{Coh\, I/II\}_G$

3.2- Projection des éléments de réduction de torseur de cohésion : (Figure 7)

Composantes de et dans le repère $R(G,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$ qu'est lié à la surface (S)

$\vec{R}=\vec{N}+\vec{T}$ et $\overrightarrow{M_G}=\overrightarrow{M_t}+\overrightarrow{M_f}$ Avec :



(Figure 7)

$\vec{N}$: effort Normale : projection de $\vec{R}$ sur la normale extérieur $(G,\vec{X})$

$\vec{T}$: effort Tranchant : projection de $\vec{R}$ sur le plan de la section droite $(G,\vec{Y},\vec{Z})$

$\overrightarrow{M_t}$: moment de torsion : projection de $\overrightarrow{M_G}$ sur la normale $(G,\vec{X})$

$\overrightarrow{M_f}$: moment de flexion : projection de $\overrightarrow{M_G}$ sur le plan $(G,\vec{Y},\vec{Z})$

Remarque : en général, $\vec{T}$ et $\overrightarrow{M_G}$ n'ont pas de direction particulière dans le plan $(G,\vec{y},\vec{z})$, il est utile de définir leurs coordonnées dans $R(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ d'où : $\vec{R}=\overline{N}\cdot\vec{x}+\overline{T_y}\cdot\vec{y}+\overline{T_z}\cdot\vec{z}$ et $\overrightarrow{M_G}=\overline{M_t}\cdot\vec{x}+\overline{M_{fGy}}\cdot\vec{y}+\overline{M_{fGz}}\cdot\vec{z}$

3.3- Définition des sollicitations simples :

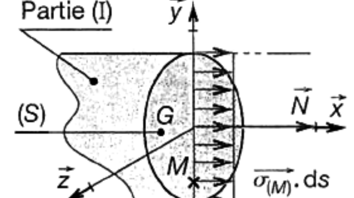
Une sollicitation est dite simple (ou pure) lorsqu' un seul des éléments de réduction du torseur de cohésion n'est pas nul.

Forme générale du torseur de cohésion :

$$\{coh\,II/I\}_G=\begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fGy} \\ T_z & M_{fGZ} \end{Bmatrix}_G$$

Traction simple (N > 0) ou $N \neq 0$; $T_y = 0$; $T_z = 0$

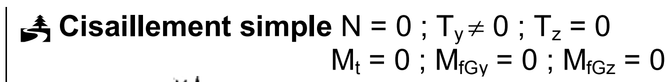
compression simple (N < 0) $M_t = 0$; $M_{fGy} = 0$; $M_{fGz} = 0$



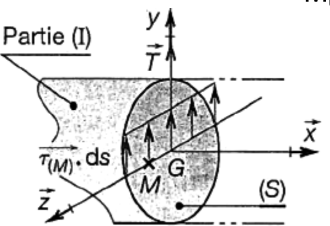
Le sens de $\vec{N}$ est celui de $(G,\vec{X})$

$$\{coh\,II/I\}_G=\begin{Bmatrix} \vec{N} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

Cisaillement simple $N = 0$; $T_y \neq 0$; $T_z = 0$



$M_t = 0$; $M_{fGy} = 0$; $M_{fGz} = 0$

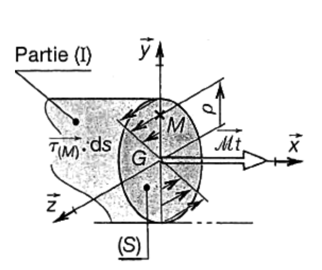


Le sens de $\overrightarrow{T_y}$ est celui de $(G,\vec{Y})$

$$\{coh\,II/I\}_G=\begin{Bmatrix} \overrightarrow{T_y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

Torsion simple $N = 0$; $T_y = 0$; $T_z = 0$

$M_t \neq 0$; $M_{fGy} = 0$; $M_{fGz} = 0$

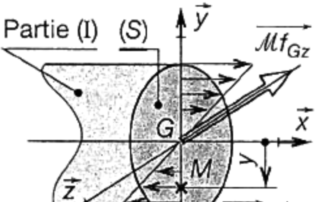


Le sens de $\overrightarrow{M_t}$ est celui de $(G,\vec{X})$

$$\{coh\,II/I\}_G=\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_t} \end{Bmatrix}_G$$

Flexion simple pure $N = 0$; $T_y = 0$; $T_z = 0$

$M_t = 0$; $M_{fGy} = 0$; $M_{fGz} \neq 0$



Le sens de $\overrightarrow{M_{fGz}}$ est celui de $(G,\vec{Z})$

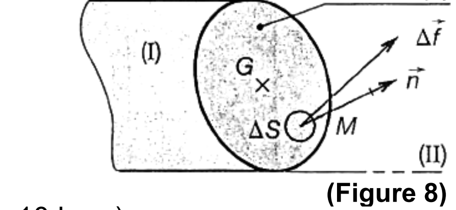
$$\{coh\,II/I\}_G=\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{fGz}} \end{Bmatrix}_G$$

IV- VECTEURS CONTRAINTES :

(S) : section quelconque, orientée par $\vec{n}$ normale a (S) extérieure à la matière de la partie (I)

$\overrightarrow{\Delta f}$: force élémentaire exercée par la partie (II) sur (I), au point M ∈ (S) **(Figure 8)**.

ΔS : élément de surface entourant le point M.



(Figure 8)

par définition : $\overrightarrow{C_{(M)}}=\lim_{\Delta S\to 0}\dfrac{\overrightarrow{\Delta f}}{\Delta S}$; $\overrightarrow{C_{(M)}}=\dfrac{\overrightarrow{df}}{dS}$; $\left\|\overrightarrow{C_{(M)}}\right\|=\dfrac{\left\|\overrightarrow{df}\right\|}{dS}$

$\left\|\overrightarrow{C_{(M)}}\right\|$: norme du vecteur contrainte, en Pascal (1Pa = 1 N / m^2).

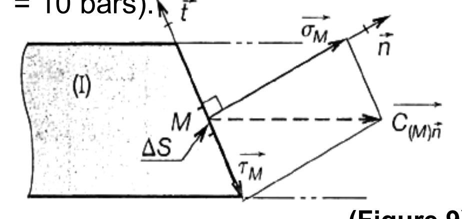
en R.d.M, on utilise le Méga pascal (1MPa = 10^6 Pa = 1 N / mm^2 = 10 bars).



Contrainte normale – Contrainte tangentielle : (Figure 9)

La contrainte normale $\overrightarrow{\sigma_M}$ est la projection de $\left\|\overrightarrow{C_{(M)}}\right\|$ sur $\vec{n}$

La contrainte tangentielle $\overrightarrow{\tau_M}$ est la projection de $\left\|\overrightarrow{C_{(M)}}\right\|$ sur $\vec{t}$



(Figure 9)

d'où : $$\overrightarrow{C_{(M)}}=\overrightarrow{\sigma_M}+\overrightarrow{\tau_M}=\sigma_M\cdot\vec{n}+\tau_M\cdot\vec{t}$$

avec : - $\vec{n}$: vecteur unitaire normal à la surface ;

- $\vec{t}$: vecteur unitaire dans le plan de la surface ;

Remarque : Une contrainte $\overrightarrow{C_{(M)}}\cdot\vec{n}$ est dite principale lorsque sa direction est normale au plan de la section ; dans ce cas : $\overrightarrow{\tau_M}=\vec{0}$